

3.10 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Νόμος ημίτονων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

2.

Νόμος συνημίτονων

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A \quad \text{και κυκλικά}$$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Τι σημαίνει επίλυση τριγώνου

Υπολογισμός των κύριων στοιχείων του (πλευρές – γωνίες)

2.

Μια άλλη γραφή του νόμου των ημίτονων

$$\alpha = 2R\eta\mu A \quad \text{και κυκλικά}$$

Σημείωση: Σημαντικό ρόλο παίζει η ακτίνα R .

3.

Πως ενεργούμε, ανάλογα με τα δεδομένα

Νόμος ημίτονων, όταν δίνονται i) μία πλευρά και δύο γωνίες

ii) δύο πλευρές και μη περιεχομένη γωνία

Νόμος συνημίτονων, όταν δίνονται i) δύο πλευρές και η περιεχομένη γωνία

ii) οι τρεις πλευρές

Σημείωση: Αν δεν θέλετε να θυμάστε τις περιπτώσεις, δοκιμάζετε διαδοχικά τους δύο νόμους.

4.

Παρατήρηση

Οι δύο νόμοι (κυρίως ο νόμος των ημίτονων) χρησιμοποιούνται και στις ασκήσεις που εμπλέκουν τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου.

Κυρίαρχο ρόλο παίζει η ακτίνα R .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ αν $\alpha = \sqrt{3} + 1$, $B = 45^\circ$ και $\Gamma = 60^\circ$

Προτεινόμενη λύση

$$A = 180^\circ - B - \Gamma = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$$

$$\begin{aligned}\eta\mu A &= \eta\mu 75^\circ = \eta\mu(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ \eta\mu 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)\end{aligned}$$

$$\alpha = 2R\eta\mu A \Rightarrow \sqrt{3} + 1 = 2R \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

$$\beta = 2R\eta\mu B = 2\sqrt{2} \eta\mu 45^\circ = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$\gamma = 2R\eta\mu \Gamma = 2\sqrt{2} \eta\mu 60^\circ = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

Πλευρά και δύο γωνίες
Νόμος ημίτονων

2.

Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ αν $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3} + 1$, και $A = 15^\circ$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\eta\mu A &= \eta\mu 15^\circ = \eta\mu(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 45^\circ \eta\mu 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)\end{aligned}$$

$$\alpha = 2R\eta\mu A \Rightarrow 1 = 2R \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1) \Rightarrow$$

$$2 = R\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$\beta = 2R\eta\mu B \Rightarrow \sqrt{3} + 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} \eta\mu B$$

$$\eta\mu B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^\circ \text{ ή } B = 135^\circ$$

- Όταν $B = 45^\circ$, $\Gamma = 180^\circ - A - B$
 $= 180^\circ - 15^\circ - 45^\circ$
 $= 120^\circ$
- Όταν $B = 135^\circ$, $\Gamma = 180^\circ - A - B$
 $= 180^\circ - 15^\circ - 135^\circ$
 $= 30^\circ$

Δύο πλευρές και μη
περιεχομένη γωνία
Νόμος ημίτονων

3.

Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ αν $\beta = \sqrt{6}$, $\gamma = \sqrt{3} + 1$ και $A = 45^\circ$

Προτεινόμενη λύση

Δύο πλευρές και
περιεχομένη γωνία.
Νόμος συνημίτονων

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A \Rightarrow \\ &= (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)\cos 45^\circ \\ &= 6 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 10 + 2\sqrt{3} - \sqrt{12}(\sqrt{3} + 1) \\ &= 10 + 2\sqrt{3} - \sqrt{36} - \sqrt{12} \\ &= 10 + 2\sqrt{3} - 6 - 2\sqrt{3} = 4 \Rightarrow \alpha = 2\end{aligned}$$

$$\alpha = 2R\eta\mu A \Rightarrow 2 = 2R\eta\mu 45^\circ \Rightarrow 2 = 2R \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

$$\beta = 2R\eta\mu B \Rightarrow \sqrt{6} = 2\sqrt{2}\eta\mu B \Rightarrow \eta\mu B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = 60^\circ \text{ ή } B = 120^\circ$$

- Όταν $B = 60^\circ$, $\Gamma = 180^\circ - A - B$
 $= 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ$
 $= 75^\circ$
- Όταν $B = 120^\circ$, $\Gamma = 180^\circ - A - B$
 $= 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ$
 $= 15^\circ$

4.

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, δίνεται ότι $A = 2\Gamma$, $\sin \Gamma = \frac{3}{4}$ και $\gamma = 4$.

Να υπολογίσετε τις πλευρές α και β .

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}A = 2\Gamma &\Rightarrow \eta\mu A = \eta\mu 2\Gamma \Rightarrow \eta\mu A = 2\eta\mu\Gamma \cos\Gamma \\ \eta\mu A &= 2\eta\mu\Gamma \frac{3}{4} \\ \frac{\eta\mu A}{\eta\mu\Gamma} &= 2 \cdot \frac{3}{4} \\ \frac{\alpha}{\gamma} &= \frac{3}{2} \\ \frac{\alpha}{4} &= \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 6\end{aligned}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \Gamma \Rightarrow 4^2 = 6^2 + \beta^2 - 2 \cdot 6\beta \cdot \frac{3}{4}$$

$$16 = 36 + \beta^2 - 9\beta$$

$$\beta^2 - 9\beta + 20 = 0$$

$$\Delta = 81 - 80 = 1, \quad \beta = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2} = 5 \text{ ή } 4$$

5.

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, οι πλευρές του είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί και η μεγαλύτερη γωνία του είναι διπλάσια της μικρότερης. Να υπολογίσετε τις πλευρές του.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $\alpha = v$ όπου v φυσικός.

Τότε $\beta = v + 1$, $\gamma = v + 2$ και $\Gamma = 2A$

$$\Gamma = 2A \Rightarrow \eta\mu\Gamma = \eta\mu 2A \Rightarrow \eta\mu\Gamma = 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu A$$

$$\frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} = 2\sigma\upsilon\nu A$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = 2\sigma\upsilon\nu A$$

$$\frac{v+2}{v} = 2\sigma\upsilon\nu A$$

$$\frac{v+2}{2v} = \sigma\upsilon\nu A$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \Rightarrow$$

$$v^2 = (v+1)^2 + (v+2)^2 - 2(v+1)(v+2) \frac{v+2}{2v}$$

$$v^3 = v(v+1)^2 + v(v+2)^2 - (v+1)(v+2)^2$$

$$v^3 = v(v^2 + 2v + 1) + v(v^2 + 4v + 4) - (v+1)(v^2 + 4v + 4)$$

$$v^3 = v^3 + 2v^2 + v + v^3 + 4v^2 + 4v - v^3 - 4v^2 - 4v - v^2 - 4v - 4$$

$$v^2 - 3v - 4 = 0 \quad \Delta = 9 + 16 = 25 \quad v = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \quad \text{ή} \quad -1$$

Η τιμή -1 απορρίπτεται, αφού ο αριθμός -1 δεν είναι φυσικός.

$$\begin{aligned} \text{Για } v = 4 \text{ θα έχουμε } \alpha &= 4, & \beta &= 4 + 1, & \gamma &= 4 + 2 \\ \alpha &= 4, & \beta &= 5, & \gamma &= 6 \end{aligned}$$

6.

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, είναι $\beta = 2\gamma$ και $A = 60^\circ$. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Προτεινόμενη λύση

$$\beta = 2\gamma \Rightarrow 2R\eta\mu\beta = 2 \cdot 2R\eta\mu\gamma \Rightarrow \eta\mu\beta = 2\eta\mu\gamma$$

$$\eta\mu\beta = 2\eta\mu(A + \beta)$$

$$\eta\mu\beta = 2\eta\mu(60^\circ + \beta)$$

$$\eta\mu\beta = 2(\eta\mu 60^\circ \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu 60^\circ \eta\mu\beta)$$

$$\eta\mu\beta = 2(\eta\mu 60^\circ \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu 60^\circ \eta\mu\beta)$$

$$\eta\mu\beta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\beta + \frac{1}{2}\eta\mu\beta\right)$$

$$\eta\mu\beta = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta$$

$$0 = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\beta$$

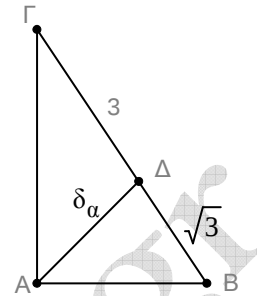
$$\sigma\upsilon\nu\beta = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ$$

7.

Σε τρίγωνο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος δ_a διαιρεί την υποτείνουσα a σε δύο τμήματα μήκους 3 και $\sqrt{3}$ αντίστοιχα.. Να υπολογίσετε τις γωνίες B , Γ και το μήκος της δ_a .

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \text{Νόμος ημίτονων στο } \text{τρ. } \Delta AB \quad \frac{\delta_a}{\eta\mu B} &= \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu 45^\circ} \\ \delta_a \eta\mu 45^\circ &= \sqrt{3} \eta\mu B \\ \delta_a \frac{\sqrt{2}}{2} &= \sqrt{3} \eta\mu B \\ \delta_a \frac{1}{\sqrt{2}} &= \sqrt{3} \eta\mu B \\ \delta_a &= \sqrt{2} \sqrt{3} \eta\mu B \quad (1) \end{aligned}$$



$$\text{Ομοίως στο } \text{τρ. } \Delta A\Gamma \quad \delta_a = 3\sqrt{2} \eta\mu \Gamma \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1), (2) \Rightarrow \sqrt{2} \sqrt{3} \eta\mu B &= 3\sqrt{2} \eta\mu \Gamma \\ \eta\mu B &= \sqrt{3} \eta\mu \Gamma \\ \sigma\upsilon\nu \Gamma &= \sqrt{3} \eta\mu \Gamma \\ \frac{\eta\mu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu \Gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \epsilon\phi \Gamma &= \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \Gamma = 30^\circ, \text{ άρα και } B = 60^\circ \end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow \delta_a = \sqrt{2} \sqrt{3} \eta\mu 60^\circ = \sqrt{2} \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

8.

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2 + \gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B = \gamma^2 + \alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} \text{Νόμος συνημίτονων} \quad \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \\ 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A &= \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 \\ \beta\gamma\sigma\upsilon\nu A &= \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ μέλος της αποδεικτέας: } \alpha^2 + \beta\gamma\sigma\upsilon\nu A &= \alpha^2 + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2} \\ &= \frac{2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} \end{aligned}$$

Ομοίως για το 2° και το 3° μέλος της αποδεικτέας

9.

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται ότι $\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} = 1$. Να δείξετε ότι $\Gamma = \frac{\pi}{3}$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} = 1 &\Rightarrow \alpha(\alpha+\gamma) + \beta(\beta+\gamma) = (\beta+\gamma)(\alpha+\gamma) \\ \alpha^2 + \alpha\gamma + \beta^2 + \beta\gamma &= \beta\alpha + \beta\gamma + \gamma\alpha + \gamma^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \beta\alpha + \gamma^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 &= \beta\alpha \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Νόμος συνημίτονων : } \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\Gamma \Rightarrow \\ 2\alpha\beta\cos\Gamma &= \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Η (1)} &\Rightarrow 2\alpha\beta\cos\Gamma = \alpha\beta \\ \cos\Gamma &= \frac{1}{2} \\ \Gamma &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

10.

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται ότι $\gamma^4 - 2(\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2 + \alpha^4 + \beta^4 = 0$. Να αποδείξετε ότι $\Gamma = \frac{\pi}{4}$ ή $\Gamma = \frac{3\pi}{4}$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη δοσμένη σχέση σαν δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο γ^2 .

$$\begin{aligned}\Delta &= [2(\alpha^2 + \beta^2)]^2 - 4(\alpha^4 + \beta^4) = 4(\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4) - 4\alpha^4 - 4\beta^4 \\ &= 4(\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \alpha^4 - \beta^4) \\ &= 8\alpha^2\beta^2 \\ &= (2\sqrt{2}\alpha\beta)^2\end{aligned}$$

$$\gamma^2 = \frac{2(\alpha^2 + \beta^2) \pm 2\sqrt{2}\alpha\beta}{2} = \alpha^2 + \beta^2 \pm \sqrt{2}\alpha\beta$$

• Όταν $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{2}\alpha\beta \quad (1)$

Νόμος συνημίτονων : $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\Gamma \quad (2)$

Από τις (1), (2) συμπεραίνουμε $-2\alpha\beta\cos\Gamma = \sqrt{2}\alpha\beta$

$$\cos\Gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Gamma = \frac{3\pi}{4}$$

• Όταν $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{2}\alpha\beta \quad (3)$

Νόμος συνημίτονων : $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\Gamma \quad (4)$

Από τις (3), (4) συμπεραίνουμε $2\alpha\beta\cos\Gamma = \sqrt{2}\alpha\beta$

$$\cos\Gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \Gamma = \frac{\pi}{4}$$

11.

Σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι
 $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\epsilon\phi\Gamma = (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)\epsilon\phi\Lambda = (\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2)\epsilon\phi\B$

Προτεινόμενη λύση

$$1^\circ \text{ μέλος} = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\epsilon\phi\Gamma = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \frac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma} \quad (1)$$

$$\text{Νόμος συνημίτονων : } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$2\alpha\beta \sigma\upsilon\nu\Gamma = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$$

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

$$\text{Νόμος ημίτονων : } \gamma = 2R\eta\mu\Gamma \Rightarrow \eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{2R}$$

$$\begin{aligned} \text{Η (1) γίνεται } (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\epsilon\phi\Gamma &= (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \frac{\frac{\gamma}{2R}}{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}} \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \frac{2\alpha\beta\gamma}{2R(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)} \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma}{R} \end{aligned}$$

Κυκλικά για το 2° και για το 3° μέλος

12.

Σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Lambda}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\B}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ μέλος} &= \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Lambda}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Lambda}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta\gamma \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma} \end{aligned}$$

Κυκλικά για το 2° και για το 3° μέλος